UN PEU DE TANGENTE HYPERBOLIQUE, UN PEU DE CONVEXITÉ

Les deux parties de ce devoir sont indépendantes. Deux niveaux de difficulté/longueur :

— Piste bleue : problème **1**.

— Piste rouge : tout le devoir.

1 APPROXIMATIONS RATIONNELLES DE LA TANGENTE HYPERBOLIQUE

1) Soient $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. On suppose que $f(0) = g(0) = 0$ et que pour tout $x \geqslant 0$: $\left|f'(x)\right| \leqslant g'(x)$.
Étudier le signe des fonctions $f+g$ et $g-f$ sur $\mathbb{R}_+$ et en déduire que pour tout $x \geqslant 0$: $\left|f(x)\right| \leqslant g(x)$.

On définit deux suites $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}_+$ en posant pour tout $x \geqslant 0$: $P_0(x) = 0$, $Q_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ et $Q_1(x) = 1$, puis pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P_{n+2}(x) = (2n+3)\,P_{n+1}(x) + x^2\,P_n(x) \qquad \text{et} \qquad Q_{n+2}(x) = (2n+3)\,Q_{n+1}(x) + x^2\,Q_n(x).$$

2) a) Montrer que les coefficients des fonctions polynomiales P_n et Q_n sont des entiers naturels pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Calculer $P_n(0)$ et $Q_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis montrer que Q_n est minorée par $\dfrac{(2n)!}{2^n n!}$ sur $\mathbb{R}_+$.

On pose pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$: $f_n(x) = Q_n(x)\,\mathrm{sh}\,x - P_n(x)\,\mathrm{ch}\,x$. Ainsi, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$:

$$f_{n+2}(x) = (2n+3)\,f_{n+1}(x) + x^2\,f_n(x).$$

3) a) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$: $f'_{n+1}(x) = -x f_n(x)$.

b) En déduire que f_n est strictement monotone sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis que pour tout $x > 0$: $\left|f_n(x)\right| > 0$.

4) On pose pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$: $g_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{2^n n!}\,\mathrm{sh}\,x$.

a) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$: $x g_n(x) \leqslant g'_{n+1}(x)$.

b) En déduire que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$: $\left|f_n(x)\right| \leqslant g_n(x)$, puis que pour tout $x > 0$:

$$0 < \left|\mathrm{th}\,x - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}\right| \leqslant \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

c) En déduire une approximation rationnelle de $\mathrm{th}\,1$ à 10^{-2} près.

5) Afin de montrer que $\mathrm{th}\,1$ est irrationnel, on raisonne par l'absurde en le supposant rationnel, de sorte que $\mathrm{th}\,1 = \dfrac{p}{q}$ pour certains $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 < \left|p\,Q_n(1) - qP_n(1)\right| \leqslant \dfrac{p}{2^n n!}$.

b) En déduire une contradiction.

c) En déduire que e est irrationnel.

On peut montrer que e^r est irrationnel pour tout $r \in \mathbb{Q}^*$ en améliorant un peu cette preuve. Essayez si cela vous intéresse !

2 Quelques inégalités de convexité

1) Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction concave. On lui associe une fonction $\widehat{f}$ de deux variables en posant pour tous $x, y > 0$:

$$\widehat{f}(x,y) = y\, f\left(\frac{x}{y}\right).$$

a) Montrer que pour tous $x, x', y, y' > 0$: $\quad \widehat{f}(x,y) + \widehat{f}(x',y') \leqslant \widehat{f}(x+x', y+y')$.

b) En déduire que pour tous $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n > 0$: $\displaystyle\sum_{k=1}^n \widehat{f}(x_k, y_k) \leqslant \widehat{f}\left(\sum_{k=1}^n x_k, \sum_{k=1}^n y_k\right)$.

2) Soient $p, q > 1$ deux réels pour lesquels $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. En appliquant le résultat de la question **1)** à la fonction $x \longmapsto x^{\frac{1}{p}}$, montrer que pour tous $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n > 0$: $\displaystyle\sum_{k=1}^n x_k y_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^n x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n y_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$ (*inégalité de Hölder*).

3) Soit $p > 1$.

a) Montrer que la fonction $x \longmapsto \left(x^{\frac{1}{p}} + 1\right)^p$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) En déduire que pour tous $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n > 0$: $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^n x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n y_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$ (*inégalité de Minkowski*).

Rappelons à présent que pour tout $\alpha > 0$, la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ peut être prolongée par continuité en 0 par la valeur 0, ce qui signifie qu'en posant $0^\alpha = 0$, on obtient une fonction puissance définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ tout entier. En travaillant avec ce type de prolongement, on aurait pu travailler sur $\mathbb{R}_+$ dans les questions précédentes plutôt que sur $\mathbb{R}_+^*$. On s'affranchit ensuite aisément de la positivité en manipulant des valeurs absolues. On peut ainsi montrer que pour tous $p, q > 1$ pour lesquels $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ et tous $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$:

$$\left|\sum_{k=1}^n x_k y_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \quad (\textit{inégalité de Hölder})$$

et : $$\left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad (\textit{inégalité de Minkowski}).$$

Pour $p = 2$, cette nouvelle inégalité de Hölder généralise l'inégalité de Cauchy-Schwarz de notre précédent devoir :

$$\left|\sum_{k=1}^n x_k y_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}\, \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2},$$

mais plaçons-nous pour finir dans le cas très simple où $n = p = 2$. Munissons le plan d'un repère orthonormal quelconque et donnons-nous deux vecteurs $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ de coordonnées respectives (x_1, x_2) et (y_1, y_2). L'inégalité de Hölder devient :

$$|x_1 y_1 + x_2 y_2| \leqslant \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\, \sqrt{y_1^2 + y_2^2},$$

autrement dit : $\left|\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}\right| \leqslant \left\|\overrightarrow{x}\right\| \times \left\|\overrightarrow{y}\right\|$. Inégalité triviale si vous savez que $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = \left\|\overrightarrow{x}\right\| \times \left\|\overrightarrow{y}\right\| \cos\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right)$. Voilà ce que l'inégalité de Hölder généralise à une échelle bien plus vaste. L'inégalité de Minkowski devient quant à elle :

$$\sqrt{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2} \leqslant \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2},$$

autrement dit $\left\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\right\| \leqslant \left\|\overrightarrow{x}\right\| + \left\|\overrightarrow{y}\right\|$. Notre bonne vieille inégalité triangulaire !